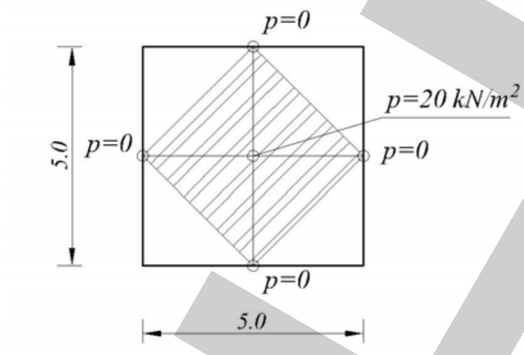
Београд 31. мај 2008.

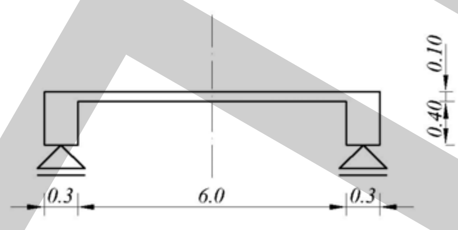
Писмени испит из Теорије површинских носача

1. За квадратну плочу оптерећену оптерећењем према слици одредити моминте савијања и угиб у средини плоче. Користити први члан реда усвојеног решења. Плоча је по контури слободно ослоњена.



E = 30 GPa
ν = 0.25
h = 25 cm

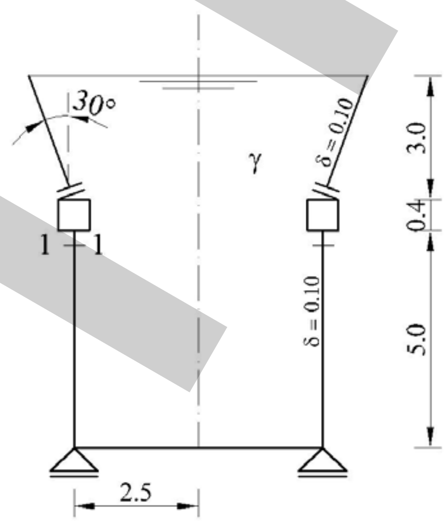
2. Услед загревања кружног прстена за $t^o = 50^\circ$ C, срачунати моменте савијања и угиб у центру кружне плоче.



$\alpha_t = 10^{-5}$ 1/°C
E=30 GPa
ν = 0.25

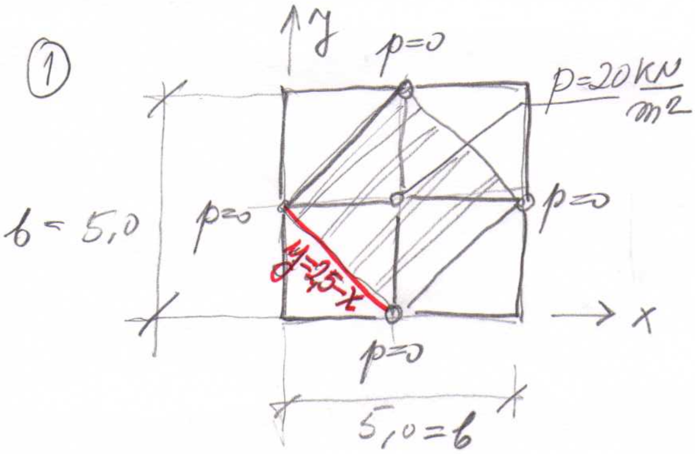
3. За ротационо симетричну конструкцију и оптерећење приказане на слици:
- Извршити декомпозицију и написати условне једначине.
- Одредити силе у пресеку 1-1.

Веза између конусне љуске и кружног прстена је таква да у љусци влада *мембранско стање напрезања*. Занемарити дејство воде на кружни прстен.



E=30 Gpa
ν= 0.2
γ= kN/m²
кружни прстен: b/d= 0.4/0.4

1



$$K=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}=\frac{30\cdot10^6\cdot0{,}25^3}{12(1-0{,}25^2)}$$

$$K=41\,666{,}\dot{6}$$

$$W(x,y)=A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

I член ряда $\Rightarrow$ $W(x,y)=A_{11}\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$

$$A_{mn}=\frac{Z_{mn}}{K\pi^4\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^2}\quad(\text{I член ряда})\Rightarrow A_{11}=\frac{Z_{11}}{K\cdot\pi^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}$$

$$Z(x,y)=a+bx+cy$$

$$\left.\begin{aligned}Z(2{,}5;0)&=a+2{,}5b=0\\Z(0;2{,}5)&=a+2{,}5c=0\\Z(2{,}5;2{,}5)&=a+2{,}5b+2{,}5c=20\end{aligned}\right\}\quad Z(x,y)=8x+8y-20\quad\begin{cases}0<x<2{,}5\\0<y<2{,}5\end{cases}$$

$$Z_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b Z(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$Z_{11}=4\cdot\frac{4}{ab}\int_0^{2,5}\sin\frac{\pi x}{5}dx\int_{2,5-x}^{2,5}(8x+8y-20)\cdot\sin\frac{\pi y}{5}dy$$

$$Z_{11}=4\cdot\frac{4}{5^2}\int_0^{2,5}\sin\frac{\pi x}{5}dx\int_{2,5-x}^{2,5}\left\{(8x-20)\sin\frac{\pi y}{5}+8y\sin\frac{\pi y}{5}\right\}dy=$$

$$\int_{2,5-x}^{2,5}(8x-20)\sin\frac{\pi y}{5}dy=(8x-20)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi y}{5}\Big|_{2,5-x}^{2,5}=$$

$$=(8x-20)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi(2{,}5-x)}{5}\right)=(8x-20)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi(2{,}5-x)}{5}=(8x-20)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi(2{,}5-x)}{5}=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{5}+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}=\sin\frac{\pi x}{5}}$$

$$\int_{2,5-x}^{2,5} 8\cdot y\cdot \sin\frac{\pi y}{5}\,dy = 8\int_{2,5-x}^{2,5} y\cdot\sin\frac{\pi y}{5}\,dy = 8\left[y\cdot\frac{5}{\pi}\cdot -\cos\frac{\pi y}{5}\Big|_{2,5-x}^{2,5} - \int\frac{5}{\pi}\cdot -\cos\frac{\pi y}{5}\,dy\right] =$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = y & du = dy \\ dv = \sin\frac{\pi y}{5}dy & v = \frac{5}{\pi}\cdot -\cos\frac{\pi y}{5} \end{array}}$$

$$= 8\left[2,5\cdot\frac{5}{\pi}\cdot -\cos\frac{\pi}{2} + (2,5-x)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi(2,5-x)}{5} + \int_{2,5-x}^{2,5}\frac{5}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi y}{5}\,dy\right] =$$

$$= 8\cdot\left[(2,5-x)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi x}{5} + \left(\frac{5}{\pi}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi y}{5}\Big|_{2,5-x}^{2,5}\right] =$$

$$= 8\left[(2,5-x)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi x}{5} + \left(\frac{5}{\pi}\right)^2\cdot\left\{\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi(2,5-x)}{5}\right\}\right] =$$

$$\boxed{\sin\frac{\pi(2,5-x)}{5} = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{5} - \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{5} = \cos\frac{\pi x}{5}}$$

$$= 8\left[(2,5-x)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi x}{5} + \left(\frac{5}{\pi}\right)^2\cdot\left(1-\cos\frac{\pi x}{5}\right)\right]$$

$$= 4\cdot\frac{4}{5^2}\int_0^{2,5}\sin\frac{\pi x}{5}\,dx\left[\cancel{(8x-20)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}} + 8\left\{\cancel{(2,5-x)\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}} + \left(\frac{5}{\pi}\right)^2\cdot\left(1-\cos\frac{\pi x}{5}\right)\right\}\right] =$$

$$= 4\cdot\frac{4}{5^2}\cdot 8\cdot\left(\frac{5}{\pi}\right)^2\cdot\int_0^{2,5}\left(1-\cos\frac{\pi x}{5}\right)\sin\frac{\pi x}{5}\,dx = 4\cdot\frac{4}{5^2}\cdot 8\cdot\left(\frac{5}{\pi}\right)^2\cdot 0,7957747$$

$$I_{11} = 10,32$$

$$A_{11} = \frac{10,32}{k\cdot\pi^4\cdot\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^2}\right)^2} = 3,973\cdot 10^{-4}$$

$$w(x,y) = 3,973\cdot 10^{-4}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}\sin\frac{\pi y}{5}$$

$$M_x = -K\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{5}\right)^2\cdot 3,973\cdot 10^{-4}\cdot\sin\frac{\pi x}{5}\cdot\sin\frac{\pi y}{5} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$M_x = K\left(\frac{\pi}{5}\right)^2\cdot 3,973\cdot 10^{-4}\cdot(1+\nu)\cdot\sin\frac{\pi x}{5}\cdot\sin\frac{\pi y}{5} = M_y$$

$M_x(2,5;2,5) = 8,168$ kNm/m $= M_y(2,5;2,5)$

$M_{xy}(2,5;2,5) = 0$